Pembahasan Soal UTS Matematika Diskrit II

Endra Pratama, S.Si., M.Cs. - Informatika UNS

IVAN WAHYU NUGROHO

Boyolali, 7 Juli 2025

Permasalahan

Berapa banyak cara membentuk sebuah panitia yang beranggotakan lima orang yang dipilih dari tujuh orang pria dan lima orang wanita jika dalam panitia tersebut harus beranggotakan paling sedikit dua orang wanita?

Solusi

Untuk membentuk panitia yang beranggotakan lima orang dengan syarat paling sedikit dua orang wanita, dapat dihitung jumlah cara dengan menggunakan komplemen.

Total banyaknya kemungkinan memilih lima orang dari dua belas orang (tujuh pria dan lima wanita) adalah:

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5! \cdot (12-5)!} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{7!}} = 792$$

Komplemen dari syarat pada soal adalah panitia beranggotakan kurang dari dua orang wanita. Buka kasus:

1. Panitia beranggotakan nol orang wanita (semua pria):

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot (7-5)!} = 7 \cdot 6 \cdot \left(\frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 2 \cdot 1}\right) = 21$$

2. Panitia beranggotakan satu orang wanita (empat pria):

$$\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{4} = \left(\frac{5!}{1! \cdot (5-1)!}\right) \cdot \left(\frac{7!}{4! \cdot (7-4)!}\right) = \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{1 \cdot \cancel{4!}} \cdot \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot \cancel{3 \cdot 2} \cdot 1} = 5 \cdot 35 = 175$$

Dengan demikian, banyaknya kemungkinan cara menyusun panitia dengan syarat paling sedikit dua orang wanita ada sebanyak $792 - (21 + 175) = 596$ cara.

Permasalahan

Berapa banyak bilangan bulat pada rentang $[1, 500]$ yang habis dibagi 8 atau 5, tetapi tidak habis dibagi 3?

Solusi

Banyaknya bilangan bulat pada rentang $[1, 500]$ yang habis dibagi 8 ada sebanyak

$$\left\lfloor \frac{500}{8} \right\rfloor = 62$$

Banyaknya bilangan bulat pada rentang $[1, 500]$ yang habis dibagi 5 ada sebanyak

$$\left\lfloor \frac{500}{5} \right\rfloor = 100$$

Banyaknya bilangan bulat pada rentang $[1, 500]$ yang habis dibagi 8 dan 5 ada sebanyak

$$\left\lfloor \frac{500}{\gcd(8,5)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{50}{40} \right\rfloor = 12$$

Banyaknya bilangan bulat pada rentang $[1, 500]$ yang habis dibagi 3 dan 8 ada sebanyak

$$\left\lfloor \frac{500}{\gcd(3,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{50}{24} \right\rfloor = 20$$

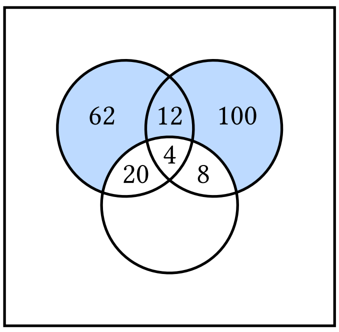
Banyaknya bilangan bulat pada rentang $[1, 500]$ yang habis dibagi 3 dan 5 ada sebanyak

$$\left\lfloor \frac{500}{\gcd(3,5)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{50}{15} \right\rfloor = 33$$

Banyaknya bilangan bulat pada rentang $[1, 500]$ yang habis dibagi 3, 5 dan 8 ada sebanyak

$$\left\lfloor \frac{500}{\gcd(3,5,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{50}{120} \right\rfloor = 4$$

Berikut ini diagram venn yang merepresentasikan ilustrasi untuk mempermudah perhitungan menggunakan prinsip inklusi eksklusi:



Dengan prinsip inklusi eksklusi, banyaknya bilangan bulat pada rentang $[1, 500]$ yang habis dibagi 8 atau 5, tetapi tidak habis dibagi 3 ada sebanyak $62 + 100 - 12 - 20 - 8 + 4 = 126$ bilangan.

Permasalahan

Probabilitas seorang anak PAUD menderita penyakit demam setelah minum vitamin adalah 0.002. Hitunglah bahwa dari 1500 anak PAUD yang menderita demam:
a. Tidak ada satu pun anak PAUD yang menderima demam setelah minum vitamin.
b. Lebih dari 3 anak PAUD yang menderita demam setelah minum vitamin.

Solusi

Permasalahan ini dapat diselesaikan menggunakan distribusi binomial Newton.

$$P(X) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

a. Tidak ada satu pun anak PAUD yang menderima demam setelah minum vitamin.

Probabilitas tidak satu pun anak PAUD menderita demam setelah minum vitamin adalah

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \binom{1500}{0} \cdot (0.002)^0 \cdot (1-0.002)^{1500-0} \\ P(X=0) &= 1 \cdot 1 \cdot (0.998)^{1500} \\ P(X=0) &= 0.04964 \end{aligned}$$

Dengan demikian, probabilitas tidak ada satu pun anak PAUD yang menderima demam setelah minum vitamin, yaitu 0.04964.

b. Lebih dari 3 anak PAUD yang menderita demam setelah minum vitamin.

Probabilitas lebih dari 3 anak PAUD menderita demam setelah minum vitamin dapat dihitung menggunakan komplemen dari probabilitas 3 atau kurang anak menderita demam.

$$\begin{aligned} P(X>3) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{3} P(X=i) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{3} \binom{1500}{i} \cdot (0.002)^i \cdot (0.998)^{1500-i} \end{aligned}$$

Menghitung nilai dari distribusi binomial ini:

$$\begin{aligned} P(X>3) &= \sum_{i=0}^{3} \binom{1500}{i} \cdot (0.002)^i \cdot (0.998)^{1500-i} \\ &\approx 0.64 \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} P(X>3) &= 1 - 0.64 \\ &= 0.36 \end{aligned}$$

Dengan demikian, probabilitas lebih dari 3 anak PAUD menderita demam setelah minum vitamin adalah sekitar 0.36 atau 36%.

Permasalahan

Distribusi berat badan 500 orang mahssiswa Informatika UNS diketahui mendekati normal dengan rata-rata 55 kg dan standar deviasi 3 kg.

a. Hitung persentase banyak mahasiswa yang berat badannya antara 50 kg hingga 60 kg.
b. Hitung total mahasiswa banyaknya mahasiswa yang berat badannya kurang dari 48 kg.

Solusi

Permasalahan ini merupakan permasalahan distribusi normal yang dinyatakan dalam rumus berikut:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

a. Persentase mahasiswa yang berat badannya antara 50 kg hingga 60 kg.

Kita perlu mencari nilai Z untuk batas bawah dan batas atas:

$$Z_1 = \frac{50 - 55}{3} = -\frac{5}{3} \approx -1.67 \qquad Z_2 = \frac{60 - 55}{3} = \frac{5}{3} \approx 1.67$$

Probabilitas mahasiswa dengan berat badan antara 50 kg hingga 60 kg adalah:

$$\begin{aligned} P(50 < X < 60) &= P(-1.67 < Z < 1.67) \\ &= P(Z < 1.67) - P(Z < -1.67) \\ &= P(Z < 1.67) - (1 - P(Z < 1.67)) \\ &= P(Z < 1.67) - (1 - 0.9525) \\ &= 0.9525 - 0.0475 \\ &= 0.905 \end{aligned}$$

Dengan demikian, persentase mahasiswa yang berat badannya antara 50 kg hingga 60 kg adalah sekitar $0.905 \times 100\% = 90.5\%$.

b. Banyaknya mahasiswa yang berat badannya kurang dari 48 kg.

Nilai Z untuk berat 48 kg:

$$Z = \frac{48 - 55}{3} = -\frac{7}{3} \approx -2.33$$

Probabilitas mahasiswa dengan berat badan kurang dari 48 kg:

$$\begin{aligned} P(X < 48) &= P(Z < -2.33) \\ &= 1 - P(Z < 2.33) \\ &= 1 - 0.9901 \\ &= 0.0099 \end{aligned}$$

Banyaknya mahasiswa dengan berat badan kurang dari 48 kg adalah:

$$0.0099 \cdot 500 = 4.95 \approx 5 \text{ mahasiswa}$$

Jadi, terdapat sekitar 5 mahasiswa yang memiliki berat badan kurang dari 48 kg.

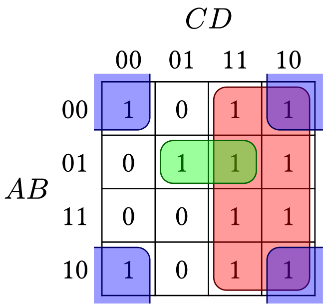
Permasalahan

Carilah fungsi sederhana dari $F(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 14, 15)$!

Solusi

Untuk menyelesaikan fungsi boolean $F(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 14, 15)$, kita akan menggunakan peta Karnaugh 4 variabel.

Berikut ini peta Karnaugh untuk fungsi tersebut:



Dari peta Karnaugh di atas, dapat diidentifikasi grup-grup *implicants*:

- Bagian merah $\Rightarrow C$
- Bagian hijau $\Rightarrow \overline{A}BD$
- Bagian ungu $\Rightarrow \overline{BD}$

Dengan demikian, diperoleh fungsi akhir yaitu $F(A, B, C, D) = C + \overline{A}BD + \overline{BD}$.

Permasalahan

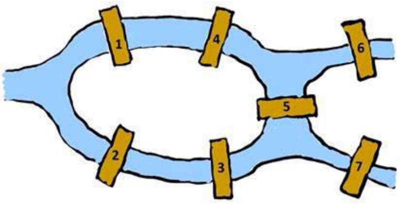
Apa penerapan aplikasi Aljabar Boolean pada kelompokmu saat presentasi di kelas? Jelaskan judul dan cara kerja booleannya!)

Solusi

Penafian: Jawaban permasalahan ini bersifat subjektif.
Jadi, tidak perlu dibahas.

Permasalahan

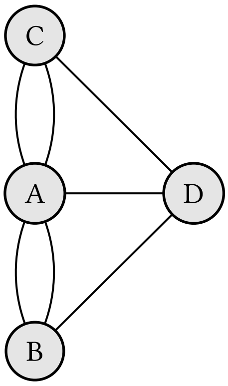
Pada permasalahan jembatan Königsberg, setiap jembatan harus bisa dilalui satu kali jalan. Jika mungkin, berikan buktinya, jika tidak mungkin, berikan alasannya!



Gambar 1: Ilustrasi Permasalahan Jembatan Königsberg

Solusi

Permasalahan jembatan Königsberg adalah masalah klasik dalam teori graf. Untuk menyelesaikan masalah ini, permasalahan perlu direpresentasikan dalam bentuk graf.



Gambar 2: Graf Permasalahan Jembatan Königsberg

Derajat setiap vertex:
- Vertex A: derajat 5 (ganjil)
- Vertex B: derajat 3 (ganjil)
- Vertex C: derajat 3 (ganjil)
- Vertex D: derajat 3 (ganjil)

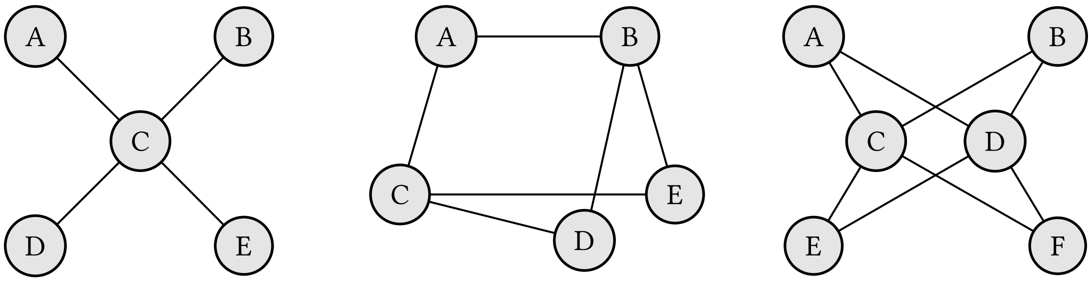
Berdasarkan teorema Euler, suatu graf memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika graf tersebut terhubung dan memiliki tepat 0 atau 2 *vertex* berderajat ganjil.

Terdapat 4 *vertex* berderajat ganjil (lebih dari 2). Akibatnya **tidak mungkin** melewati semua jembatan tepat satu kali dalam satu perjalanan.

Dengan demikian, permasalahan jembatan Königsberg tidak memiliki solusi.

Permasalahan

Tentukan apakah graf-graf berikut termasuk graf *bipartite*? Jika iya, gambar bentuk *bipartite*-nya. Jika tidak, berikan alasannya!



Solusi

Kerjakan sendiri hehehe.